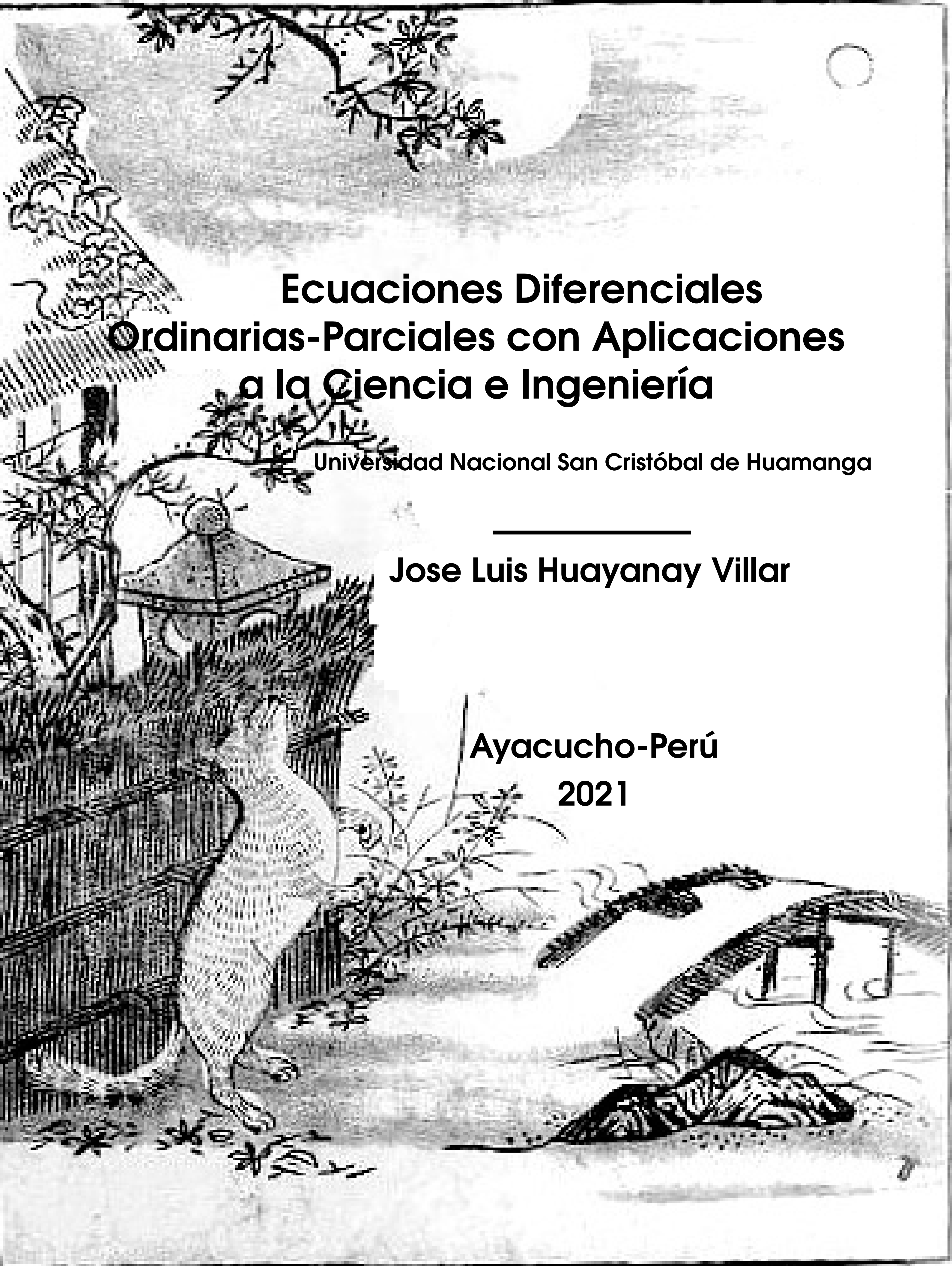

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias-Parciales con Aplicaciones a la Ciencia e Ingeniería

Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga

Jose Luis Huayanay Villar

Ayacucho-Perú
2021

Índice general

Parte Uno

1. Introducción

El presente libro tiene como objetivo dar a conocer las bondades de las **ecuaciones diferenciales Ordinarias-Parciales y aplicaciones** del campo de la ciencia e ingeniería.En matemáticas, una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una o más funciones y sus derivadas .[1] En las aplicaciones, las funciones generalmente representan cantidades físicas, las derivadas representan sus tasas de cambio y la ecuación diferencial define una relación entre las dos. Tales relaciones son comunes; por lo tanto, las ecuaciones diferenciales juegan un papel destacado en muchas disciplinas, incluidas la ingeniería , la física , la economía y la biología .

2. Ecuación Diferencial Ordinaria

2.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

2.1.1 Introducción

En matemáticas , una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ecuación diferencial que contiene una o más funciones de una variable independiente y las derivadas de esas funciones. [1] El término ordinario se usa en contraste con el término ecuación diferencial parcial que puede ser con respecto a más de una variable independiente.

2.1.2 Definiciones

En lo que sigue, vamos decir que y ser una variable dependiente y x una variable independiente , y

$$y = f(x), \tag{2.1.1}$$

es una función desconocida de x .La notación para la diferenciación varía según el autor y sobre qué notación es más útil para la tarea en cuestión.En este contexto, la notación de Leibniz.

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{d^nx}, \tag{2.1.2}$$

es más útil para la diferenciación e integración , mientras que la notación de Lagrange

$$y^i, y^{ii}, \ldots, y^n, \tag{2.1.3}$$

es más útil para representar derivadas de cualquier orden de forma compacta, y la notación de Newton

$$(\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y})(\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}), \tag{2.1.4}$$

se utiliza a menudo en física para representar derivadas de bajo orden con respecto al tiempo.

2.2 Diferenciales y sus aplicaciones

En esta sección realizamos un breve recordatorio de las definiciones diferenciales o derivadas importantes. La derivada de una función en su forma matemática es la razón o velocidad de cambio de una función en un determinado punto. Es decir, qué tan rápido se está produciendo una variación. Desde el punto de vista geométrica, la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente al punto donde se ubica la dirección, suponiendo que esta dirección es x.
Por ejemplo, si una partícula recorre una distancia de $5m$ sobre la trayectoria en un lapso de $2s$, el módulo de su velocidad media sobre la trayectoria es:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5}{2} = 2,\hat{5} \text{ m/s} \tag{2.2.1}$$

Sí se desea conocer la velocidad de un objeto que se desplaza sobre una determinada trayectoria cuando el intervalo de tiempo es infinitamente pequeño, asimismo el espacio recorrido también pequeño, que depende de la trayectoria. La velocidad instantánea sera representada de la forma:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \tag{2.2.2}$$

2.2.1 Velocidad angular

En el desenvolvimiento angular de los movimientos circulares, se produce una velocidad angulara la variación del ángulo θ, posición angular en el tiempo. La velocidad angular se representa por la letra griega ω y se mide, en el SI, en radianes por segundo (rad/s). Se define matemáticamente como:

$$\omega_m = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{\phi - \phi_0}{t - t_0} = \frac{\phi_B - \phi_A}{t_B - t_A} \tag{2.2.3}$$

la velocidad instantánea es representado como:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \lim_{t_B \to t_A} \frac{\phi_B - \phi_A}{t_B - t_A} = \lim_{t_B \to t_A} \frac{\phi(t_B) - \phi(t_A)}{t_B - t_A} = \frac{d\phi}{dt} \tag{2.2.4}$$

2.2.2 Definición 01: Derivada exponencial y constante

si

$$\frac{df^n(x)}{dx} = nf(x)^{n-1}\frac{df(x)}{dt} \tag{2.2.5}$$

si k: constante, f(x)=k

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dk}{dt} = 0 \tag{2.2.6}$$

Ejemplos: Si una asteroide (Fig:2.2.1) se encuentra orbitando al rededor de la tierra a una posición de:

$$\vec{r}(t) = (t^2+2)\hat{\imath} + (t^3+1)\hat{\jmath} + (t^4+0)\hat{k} \qquad (m) \tag{2.2.7}$$

encuentre la velocidad y aceleración

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(t^2+2)}{dt}\hat{\imath} + \frac{d(t^3+1)}{d}\hat{\jmath} + \frac{d(t^4+0)}{dt}\hat{k} \tag{2.2.8}$$

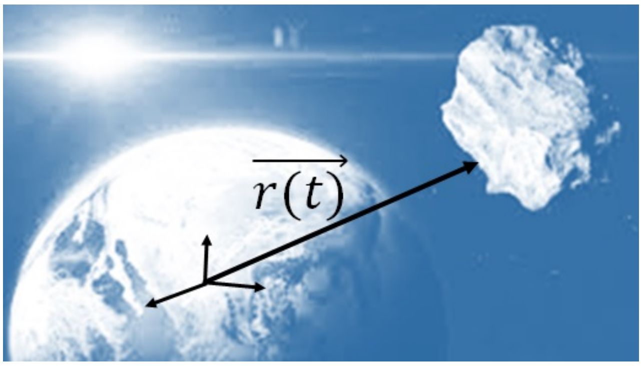

Figura 2.2.1: *Sistema de referencia del asteroide*

$$\vec{v}(t) = 2t\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 4t^3\hat{k} \qquad (m/s) \tag{2.2.9}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(2t)}{dt}\hat{i} + \frac{d(3t^2)}{d}\hat{j} + \frac{d(4t^3)}{dt}\hat{k} \tag{2.2.10}$$

$$\vec{a}(t) = 2\hat{i} + 6t\hat{j} + 12t^2\hat{k} \qquad (m/s^2) \tag{2.2.11}$$

2.3 Búsqueda de soluciones exactas

En este libro algunas ecuaciones diferenciales tienen soluciones que se pueden escribir de forma exacta y cerrada. Supóngase que de acuerdo al problema anterior (Fig:2.2.1) , consideramos que el tiempo es un factor importante, entonces para t=10,000 segundos se obtendrá:

$$\vec{v}(t) = 2t\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 4t^3\hat{k} = 2(10,000)\hat{i} + 3(10,000)^2\hat{j} + 4(10,000)^3\hat{k} \tag{2.3.1}$$

$$\vec{v}(t) = 2\times 10^4\hat{i} + 3\times 10^8\hat{j} + 4\times 10^{12}\hat{k} \qquad (m/s) \tag{2.3.2}$$

$$\vec{a}(t) = 2\hat{i} + 6t\hat{j} + 12t^2\hat{k} = 2\hat{i} + 6(10,000)\hat{j} + 12(10,000)^2\hat{k} \tag{2.3.3}$$

$$\vec{a}(t) = 2\hat{i} + 6\times 10^4\hat{j} + 12\times 10^8\hat{k} \qquad (m/s^2) \tag{2.3.4}$$

2.4 Ecuaciones ordinarias separables

2.4.1 Primer orden, separable en x y y

En este primer caso analizaremos ecuaciones e primer orden, separable en x y y (caso general, ver más abajo para casos especiales)

$$\begin{aligned} P_1(x)Q_1(y) + P_2(x)Q_2(y)\frac{dy}{dx} = 0 \\ P_1(x)Q_1(y)\,dx + P_2(x)Q_2(y)\,dy = 0 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Método de solución

Separación de variables (dividir por $P_2 Q_1$).

$$\int^x \frac{P_1(\lambda)}{P_2(\lambda)}\,d\lambda + \int^y \frac{Q_2(\lambda)}{Q_1(\lambda)}\,d\lambda = C \tag{2.4.2}$$

2.4.2 Primer orden, separable en x

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= F(x) \\ dy &= F(x)\,dx \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Método de solución

En este caso se puede analizar por integración directa.

$$y = \int^x F(\lambda)\,d\lambda + C \tag{2.4.4}$$

2.4.3 Primer orden, autónomo, separable en y

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= F(y) \\ dy &= F(y)\,dx \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Método de solución

En este caso se puede analizar por separación de variables (dividir por F).

$$x = \int^y \frac{d\lambda}{F(\lambda)} + C \tag{2.4.6}$$

2.4.4 Primer orden general, separable en X y Y

$$\begin{aligned} P(y)\frac{dy}{dx} + Q(x) &= 0 \\ P(y)\,dy + Q(x)\,dx &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Método de solución

En este caso se puede analizar integrando todo.

$$\int^y P(\lambda)\,d\lambda + \int^x Q(\lambda)\,d\lambda = C \tag{2.4.8}$$

2.5 Integrales y sus aplicaciones

El integral, tan bien relacionado con el cálculo infinitesimal, parte de las matemáticas y física en el proceso de integración o antiderivación. Es muy usado en en el campo de la ingeniería y en la ciencia; es muy importante para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución. Asimismo en las aplicaciones en sistemas de automatización y control relacionado con el pasado de las cosas o causa.

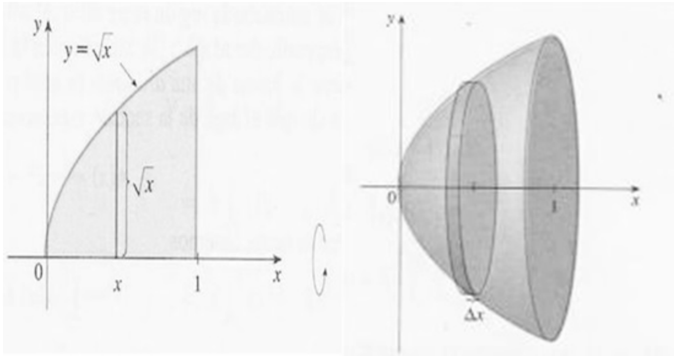

Figura 2.5.1: *Partícula en movimiento.*

Definición 02

La integral de una combinación lineal es la combinación lineal de las integrales

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx. \tag{2.5.1}$$

Según la integral de Riemann de una función f sobre el intervalo $[a,b]$ es igual a S si: Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para cualquier partición etiquetada $[a,b]$ con paso más pequeño que δ se tiene

$$\left| S - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_i \right| < \varepsilon \tag{2.5.2}$$

donde

$$S = \int_a^b f = \lim_{\|\Delta_i\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_i \tag{2.5.3}$$

entonces para un integral de una función con exponente n sera.

$$\int f(x)^n dx == \frac{f(x)^{n+1}}{q+1} \tag{2.5.4}$$

Ejemplos: Si una determinada partícula se mueve de la forma $f(x) = \sqrt{x}$ (FIg:2.5.1), en los intervalos de $[0,1]$, encontremos el área y volumen de movimiento de la partícula.

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}. \tag{2.5.5}$$

Ejercicios propuestos

2.5.1 Teorema fundamental del cálculo

Si para una función f que es real integrable definida en un intervalo cerrado $[a,b]$. Luego se define F para cada x de $[a,b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx. \tag{2.5.6}$$

entonces se podría decir que F es continua en $[a,b]$. Ahora si f es continua en x de $[a,b]$,entonces F es derivable en x, y por lo tanto $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

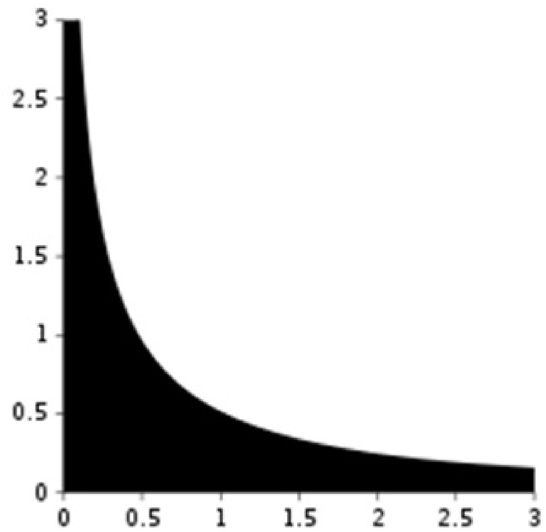

Figura 2.5.2: *La integral impropia del objeto*

2.5.2 Integrales impropias

Si en los intervalos no son limitadas o acotadas, por ejemplo en su extremo superior, entonces la integral impropia tendrá que ser límite cuando el punto final tiende a infinito.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{2.5.7}$$

Un dato importante es que si el integrando solo está definido en un intervalo finito semiabierto, es decir un intervalo como $(a,b]$, entonces, se obtendrá el límite que puede suministrar un resultado finito.

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \tag{2.5.8}$$

Ejemplos: Se dese representar la dinámica de un determinado objeto (Fig:2.5.2) y su función es representada por $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} &= \lim_{s\to 0}\int_s^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} + \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} \\
&= \lim_{s\to 0}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\arctan\frac{1}{\sqrt{s}}\right) + \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - 2\arctan\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\
&= \pi.
\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

posee intervalos no acotados tanto en el dominio como en el recorrido.

2.5.3 Trabajo y Energía

En el campo de la física hay múltiples formas naturales análogas continuas en términos de integrales de línea; por ejemplo, el trabajo podría ser representado como una fuerza multiplicada por la distancia que puede ser representado en términos de cantidades vectoriales como:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \tag{2.5.10}$$

En términos de la integral de línea, es decir cuando las existe un razón de cambio en la posición, expresada de la siguiente forma:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{2.5.11}$$

la fuerza podría ser expresada vez $F = m.a$

$$W = \int_C \vec{m}.a \cdot d\vec{s} \tag{2.5.12}$$

y la aceleración en términos de posición s

$$W = \int_C \vec{m}.\frac{d^2D(s)}{ds^2} \cdot d\vec{s} \tag{2.5.13}$$

2.5.4 Movimiento oscilatorio

en esta sesión define-se el movimiento oscilatorio o vibratorio como un movimiento en torno a un punto de equilibrio estable. para la velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje X, entonces esta representada por una ecuación diferencial de la forma

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{2.5.14}$$

si la partícula tiene un movimiento armónico simple de la forma

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{2.5.15}$$

entonces

$$v = \omega A\cos(\omega t + \phi) \tag{2.5.16}$$

donde:
x, es la elongación
t, es el tiempo
T, es el periodo
A, es la amplitud o elongación máxima.
$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, es la frecuencia angular
f, es la frecuencia
ϕ, es la fase inicial de la misma manera para la aceleracion res

3. Ecuaciones diferenciales parciales

(EDP) es una ecuación que impone relaciones entre las diversas derivadas parciales de una función multivariable .

3.1 Distribución de dinámica no leal de Richards

A não-linearidade na dinâmica da propagação de água no solo e consequência dependência da condutividade hidráulica com respeito a coluna de água do potencial matrico $K(\Psi)$ ou ao conteúdo da água (θ) no solo $K(\theta)$.Esta e uma Equação em Derivadas Parciais Não Linear de (richards1931capillary e H:98).Equação de Richards em forma mista em que existem duas variáveis de estado (Ψ,θ) na seguinte forma,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=C(\Psi(\theta))\frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial t}=-\nabla q, \tag{3.1.1}$$

onde q fluxo instantâneo (m/s) ou densidade de fluxo de água em direções (x,y,z).Si C capacidade especifica (m^3/s), onde ∇q e gradiente de movimento de fluido ou água,para nabla tense,

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k \tag{3.1.2}$$

i,j,k sao vetores unitários, ∂ função diferenciais parciais (EDP) e a partir de equacao 3.1.1 e 3.1.2 ten-se.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}[K(\Psi(\theta))\frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial x}]+\frac{\partial}{\partial y}[K(\Psi(\theta))\frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial y}]\\+\frac{\partial}{\partial z}[K(\Psi(\theta))\frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial z}]+\frac{\partial K(\Psi(\theta))}{\partial z},\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Figura 3.1.1: *Dinámica de infiltración de agua.*

usando a regra da cadeia e fazendo algumas simplificações matemáticas, temos pineda2018resolucion,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}[K(\Psi(\theta))\frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}]+\frac{\partial}{\partial y}[K(\Psi(\theta))\frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}]$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}[K(\Psi(\theta))(\frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}+1)], \quad (3.1.4)$$

A difusividade hidráulica do conteúdo de água pode ser representada na forma

$$D(\theta)=\frac{K(\theta)}{C(\theta)}, \quad (3.1.5)$$

A expressão da equação de Richards ,depende apenas da umidade com dimensão tridimensional H:98.Em forma EDP não linear[Eq. (2.1)]pineda2018resolucion .

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}]+\frac{\partial}{\partial y}[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y}]+\frac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}+K(\theta)\right] \quad (3.1.6)$$

Outra forma de expressar a equação de richards1931capillary, depende apenas da umidade como uma espaço unidimensional vertical molina2017distributed

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\nabla[D(\theta)\nabla\theta]-\frac{dK(\theta)}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}, \quad (3.1.7)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}]-\frac{dK(\theta)}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}, \quad (3.1.8)$$

resolvendo partir da equação (3.1.8) Resulta

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=D(\theta)\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+\left[\frac{\partial D(\theta)}{\partial z}-\frac{dK(\theta)}{d\theta}\right]\frac{\partial\theta}{\partial z}, \quad (3.1.9)$$

representa e movimento na água em solos não saturados que podem ser também representados em outra nomenclatura , forma vertical.

$$\theta_t = D(\theta)\theta_{zz} - [D_z(\theta) - K'(\theta)]\theta_z\,, \tag{3.1.10}$$

Onde

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(z,t) = \theta_t(z,t) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial z}(z,t) = \theta_z(z,t)$$
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(x,t) = \theta_{xx}(x,t) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}(z,t) = \theta_{zz}(z,t) \tag{3.1.11}$$

A equação de Richards na forma horizontal

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}] \tag{3.1.12}$$

3.1.1 difusividade e condutividade

A θ pode-se expressar em função de Θ adimensional

$$\theta = \Theta(\theta_s - \theta_r) + \theta_r \tag{3.1.13}$$

Depois encontramos o modelo, que descreve aqui como uma função do conteúdo de água adimensional Θ [Eq. (2-3)]V:80,[Eq. (5)]hayek2016exact.

$$\Theta(\theta) = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[\frac{1}{1+(\alpha h)^p}\right]^m \tag{3.1.14}$$

Onde θ_r umidade residual,θ_r umidade saturada, conteúdo de água no solo $\theta(m^3/m^3)$,p parâmetro positivo que depende de médio, m parâmetro para a inclinação de a profundidade com h (cabeça de aguá) [Eq. (20)]V:80

$$\begin{aligned} D(\Theta) = \frac{(1-m)K_s}{2\alpha m(\theta_s-\theta_r)}\Theta^{\frac{3-\frac{1}{m}}{2}}[(1-\Theta^{\frac{1}{m}})^{\frac{-(m+1)}{2}} \\ -(1-\Theta^{\frac{1}{m}})^{\frac{(m-1)}{2}}], \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Na mesma maneira a condutividade hidráulica gardner1960dynamic.

$$\begin{aligned} K(\Theta) = K_s K_r = K_s\{\Theta^2[1-\Theta^{\frac{1}{m}})^m]\}, \\ (m = 1-\frac{2}{p}, 0 < m < 1; p > 2), \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Para reduzir a complexidades e simulação pode-se reduzir a equação de Richards, em termos do conteúdo de água adimensional [**hayek2016exact**].

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}[D(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial z}] - \frac{\partial K(\Theta)}{\partial z}, \tag{3.1.17}$$

Bibliografía

Books

- GREENE, W.H. (2003) “Econometric Analysis”5ª edición. Prentice Hall N.J. Capítulo 21

- WOOLDRIDGE, J.M. (2010) “Introducción a la Econometría: Un Enfoque Moderno". 4ª edición. Cengage Learning. Capítulo 17

Índice alfabético